

Réseaux de Petri

--0--

Documents autorisés : cours polycopié et notes de cours

1) Problème 1 (10 points)

Considérons le problème des philosophes mangeurs de spaghettis (pour trois philosophes). Chaque philosophe peut être dans deux états, soit il pense, soit il est en train de manger des spaghettis. Pour manger il a besoin de deux ressources qui sont des cuillères. Malheureusement, vu la grande pauvreté du maître de maison, il n'y a que trois cuillères sur la table, elles sont posées entre les philosophes. Dans l'état initial les trois philosophes pensent. Chaque fois qu'un philosophe décide de manger, il doit prendre la cuillère située à sa droite et la cuillère située à sa gauche. Il doit faire cela d'un coup pour éviter la situation de blocage mortel qui peut arriver si chaque philosophe n'a qu'une seule cuillère. Lorsqu'un philosophe est rassasié, il repose les deux cuillères ce qui donne à ses voisins une possibilité de manger.

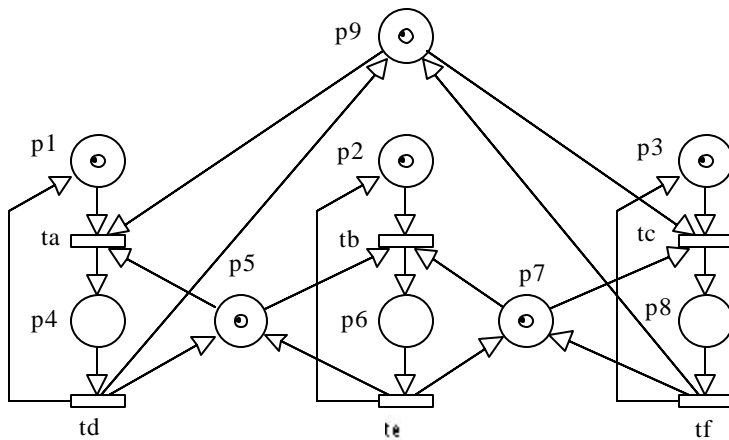


Figure 1 : Réseau à interpréter

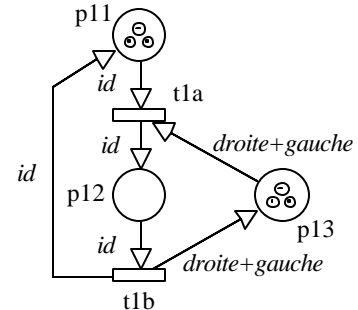


Figure 2 : Réseau coloré

a) Expliquer comment le réseau de Petri (ordinaire) de la figure 1 peut représenter ce mécanisme. Pour cela dire ce que sont les places et les transitions de ce réseau. On appelle **Ph₁**, **Ph₂** et **Ph₃** les philosophes et **Cui₁**, **Cui₂**, **Cui₃** les cuillères. Les états sont **Ph_pense**, **Ph_mange** et **Cui_libre**.

b) Par repliage, on modélise le même problème par le réseau de Petri coloré de la figure 2. Il s'agit de trouver une solution ne faisant intervenir que deux fonctions: la fonction "id" et la fonction "droite+gauche". On appelle **Ph₁**, **Ph₂** et **Ph₃** les philosophes et **Cui₁**, **Cui₂**, **Cui₃** les cuillères. Expliquer le repliage et donner les ensembles de couleurs (fonction C_{Sec} du cours polycopié) pour les places et les transitions. Écrire sous forme de matrices les deux fonctions "id" et "droite+gauche". Donner le marquage initial.

c) Analyser le réseau de Petri de la Figure 1 par réduction en explicitant bien les règles utilisées. Les "bonnes propriétés" sont-elles vérifiées ?

T.S.V.P.

Problème 2 (10 points)

On considère le réseau de Petri de la Figure 3.

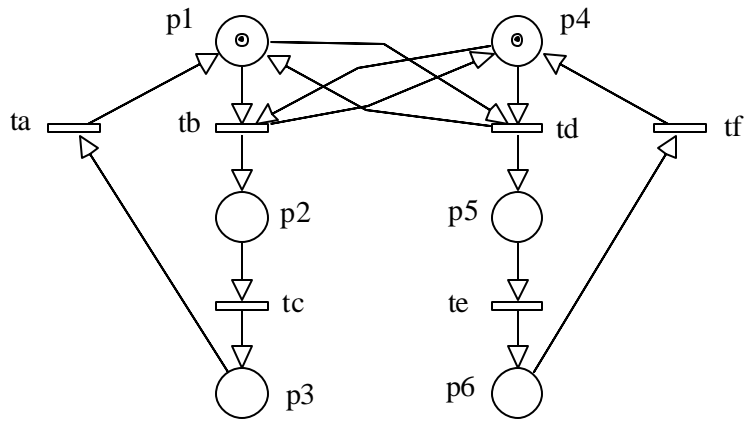


Figure 3

d) Calculer une base de composantes conservatives positives. Que peut-on en déduire ?

e) Analyser par réduction le réseau de Petri de la figure 3 pour le marquage initial donné.

f) Construire le graphe des marquages accessibles du réseau de Petri de la figure 3 pour le marquage initial donné.

g) Montrer que l'on ne peut pas avoir simultanément plus d'un jeton dans les places p2 et p3, plus d'un jeton simultanément dans les places p5 et p6 et que de plus si on a un jeton en p2 ou p3 on ne peut pas simultanément en avoir un dans p5 ou p6. En résumé, il faut montrer :

$$M(p2) + M(p3) = 1 \quad (1)$$

$$M(p5) + M(p6) = 1 \quad (2)$$

$$M(p2) + M(p3) + M(p5) + M(p6) = 1 \quad (3)$$

Ces preuves peuvent-elles toutes s'appuyer sur ce que l'on a obtenu dans la question d) ?

Correction du devoir

Problème 1

a)

Les places p1, p2 et p3, respectivement, représentent les philosophes Ph1, Ph2 et Ph3 dans l'état initial, en train de penser. Ce sont donc les états Ph_pense pour Ph1, Ph2 et Ph3. Les places p4, p6 et p8, respectivement, représentent les philosophes Ph1, Ph2 et Ph3 en train de manger. Ce sont donc les états Ph_mange pour Ph1, Ph2 et Ph3 respectivement. Les places p9, p5 et p7, respectivement, représentent les cuillères Cui1, Cui2 et Cui3 dans l'état Cui_libre.

Les transitions ta, tb et tc représentent les changements d'état des philosophes des états Ph_pense aux états Ph_mange. Les transitions td, te et tf représentent les changements d'état des philosophes des états Ph_mange aux états Ph_pense.

La place P4 qui représente l'état Ph_mange pour Ph1 représente aussi un état occupé des cuillères Cui1 et Cui2. La place P6 qui représente l'état Ph_mange pour Ph2 représente aussi un état occupé des cuillères Cui2 et Cui3. La place P8 qui représente l'état Ph_mange pour Ph3 représente aussi un état occupé des cuillères Cui3 et Cui1.

En triplant les places p4, p6 et p8 pour différencier le fait qu'elles représentent en fait un état pour un philosophe et deux cuillères, on peut mettre en évidence le fait que ce réseau de Petri représente un système de 6 objets communiquant de façon synchrone comme représenté sur la figure 4. Les trois philosophes sont en rouge, les cuillères sont en vert, bleu et noir. Les communications entre les objets sont synchrones.

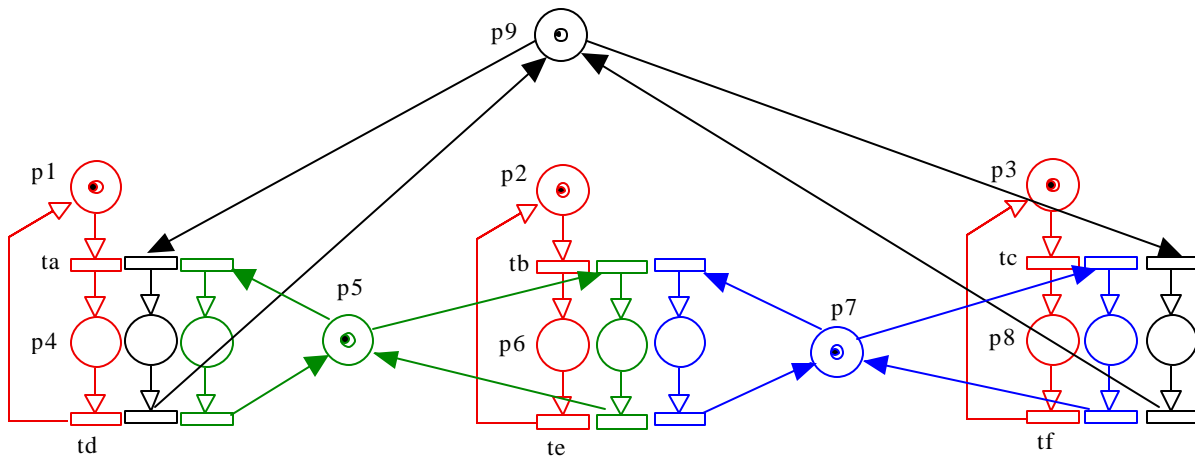


Figure 4

b)

Replions les trois "objets" Philosophes (p1, ta, p4, td), (p2, tb, p6, te) et (p3, tc, p8,tf) pour former une seule classe (p11, t1a, p12, t1b). De même, replions les trois objets cuillères (p9, ta, p4, td, tc, p8, tf), (p5, ta, p4, td, tb, p6, te) et (p7, tb, p6, te, tc, p8, tf) pour former une seule classe (p13, t1a, p12, t1b). Remarquons que les deux états occupés des cuillères (par exemple p4 et p8 pour la cuillère dont l'état disponible est p9) sont reliées les uns sur les autres.

Soit l'ensemble des couleurs Coul = {Ph1, Ph2, Ph3, Cui1, Cui2, Cui3}.

Puisque p11 résulte du repliage de p1, p2 et p3, nous avons :

- Csec(p11) = {Ph1, Ph2, Ph3}

Puisque p13 résulte du repliage de p9, p5 et p7 nous avons :

- Csec(p13) = { Cui1, Cui2, Cui3}.

Pour que la solution soit compatible avec le réseau de la figure 2 compte tenu des fonctions "id" portées par les arcs, nous devons avoir (et c'est normal au vu des repliages effectués) :

- Csec(t1a) = Csec(p12) = Csec(t1b) = Csec(p11) = {Ph1, Ph2, Ph3}.

Cela implique que les noms des cuillères sont "oubliés" lorsque les philosophes mangent. Cela est possible car chaque philosophe utilise toujours les mêmes cuillères (il prend celle qui est à sa droite et celle qui est à sa gauche). Il n'y a qu'une façon de manger. Le nom du philosophe en train de manger est donc suffisant pour déduire celui des cuillères utilisées.

$$id = \begin{array}{c} Ph1 \\ Ph2 \\ Ph3 \end{array} \begin{array}{ccc} Ph1 & Ph2 & Ph3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$droite + gauche = \begin{array}{c} Ph1 \\ Ph2 \\ Ph3 \end{array} \begin{array}{ccc} Cui1 & Cui2 & Cui3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Cette solution correspond à l'association du philosophe Ph1 à la place p1 et à celle de la cuillère Cui1 à la place p9. Si l'on associe Ph1 à p1 et Cui1 à p5 on aurait :

$$droite + gauche = \begin{array}{c} Ph1 \\ Ph2 \\ Ph3 \end{array} \begin{array}{ccc} Cui1 & Cui2 & Cui3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

On peut également associer Ph1 à p1 et Cui1 à p7 et avoir (les trois solutions sont équivalentes):

$$droite + gauche = \begin{array}{c} Ph1 \\ Ph2 \\ Ph3 \end{array} \begin{array}{ccc} Cui1 & Cui2 & Cui3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Le marquage initial du réseau de la figure 2 doit être (dans les deux cas) :

$$M_0 = \begin{array}{c} p11 \\ p12 \\ p13 \end{array} \left[\begin{array}{c} Ph1 + Ph2 + Ph3 \\ 0 \\ Cui1 + Cui2 + Cui3 \end{array} \right]$$

c)

Les places p4, p6 et p8 sont substituables. En effet, les transitions td, te et tf n'ont qu'une place en entrée et cette place n'a pas d'autre transition en sortie. Les transitions ta, tb et tc produisent dans p4, p6 et p8 exactement le marquage nécessaire aux franchissements des transitions de sortie. Par exemple, pour la place p4, le franchissement de ta rend celui de td possible et inévitable indépendamment du marquage des autres places.

D'autre part, les places p4, p6 et p8 sont initialement vides ($M_0(p4) = M_0(p6) = M_0(p8) = 0$). Nous aurons donc équivalence vis-à-vis de la propriété "réinitialisable".

Enfin les transitions de sortie des places p4, p6 et p8 (respectivement td, te et tf) possèdent au moins une place en sortie (respectivement, par exemple, p1, p2 et p3). Nous aurons donc équivalence vis-à-vis de la propriété "k-borné".

Le réseau réduit est celui de la figure 5.

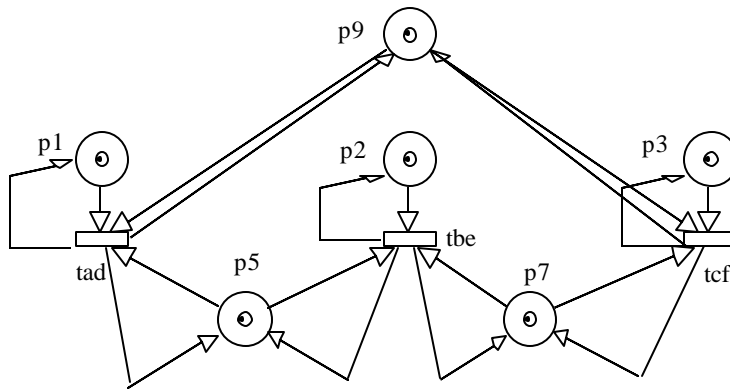


Figure 5

Maintenant, les places p1, p2, p3, p9, p5 et p7 sont des places implicites dégénérées. En effet, elles ne sont reliées au reste du réseau de Petri que par des boucles élémentaires de poids 1 et elles contiennent initialement un jeton. Elles peuvent donc être éliminées. La condition concernant leur marquage initial pour pouvoir être éliminées est en fait : $M_0(p1) \geq 1$, $M_0(p2) \geq 1$, $M_0(p3) \geq 1$, $M_0(p9) \geq 1$, $M_0(p5) \geq 1$ et $M_0(p7) \geq 1$. Nous obtenons le réseau de la figure 6.



Figure 6

Nous avons maintenant la transition tbe qui est identique à la transition tad et la transition tcf identique à tad. Nous obtenons donc le réseau complètement réduit de la figure 7.

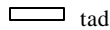


Figure 7

Ce réseau est k-borné, vivant et réinitialisable pour son marquage initial. Comme nous avons appliqué des règles de réduction conservant les trois bonnes propriétés, nous en déduisons que le réseau de Petri de la figure 1 (et donc celui de la figure 2 qui lui est équivalent) est k-borné, vivant et réinitialisable pour le marquage initial donné. Cela veut dire que la description formelle du problème des trois philosophes donnée sous la forme des réseaux de Petri des figures 1 et 2, avec le marquage initial correspondant, est logiquement cohérente. En particulier il n'y aura pas de blocage mortel.

Remarque : Le réseau de la figure 1 serait également k-borné, vivant et réinitialisable pour tout marquage initial tel que les places p4, p6 et p8 sont vides et les places p1, p2, p3, p9, p5, p7 contiennent au moins un jeton. Toutefois, si l'on met plus d'un jeton dans ces places, on ne décrit plus le problème des philosophes.

Problème 2

d)

Écrivons la matrice C , matrice d'incidence du réseau de Petri de la figure 3.

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} ta & tb & tc & td & te & tf \end{matrix} \\ \begin{matrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Il faut chercher une base de composantes conservatives positives, c'est-à-dire caractériser par une base positive toutes les solutions de l'équation $C^T \cdot f = 0$ où l'inconnue est le vecteur f de pondération des places.

En examinant la colonne ta , nous voyons que l'on peut remplacer la ligne $p3$ par la ligne $p1+p3$ puis supprimer la ligne $p1$ et la colonne ta . En examinant la colonne td , nous voyons que l'on peut remplacer la ligne $p5$ par la ligne $p4+p5$ puis supprimer la ligne $p4$ et la colonne td . Nous obtenons la matrice suivante :

$$C_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} tb & tc & te & tf \end{matrix} \\ \begin{matrix} p2 \\ p1+p3 \\ p4+p5 \\ p6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

En examinant la colonne tb , nous voyons que l'on peut remplacer la ligne $p1+p3$ par la ligne $p1+p2+p3$ puis supprimer la ligne $p2$ et la colonne tb . En examinant la colonne te , nous voyons que l'on peut remplacer la ligne $p6$ par la ligne $p4+p5+p6$ puis supprimer la ligne $p4+p5$ et la colonne te . Nous obtenons la matrice suivante :

$$C_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} tc & tf \end{matrix} \\ \begin{matrix} p1+p2+p3 \\ p4+p5+p6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Nous avons donc obtenu une base B des solutions composée des deux vecteurs f^1 et f^2 .

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} f^1 & f^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Associées aux vecteurs f^1 et f^2 nous avons les deux invariants de places suivants en prenant en compte le marquage initial du réseau de Petri :

$$M(p1) + M(p2) + M(p3) = 1 \quad (4)$$

$$M(p4) + M(p5) + M(p6) = 1 \quad (5)$$

Nous avons une couverture de composantes conservatives positives puisque les deux vecteurs f^1 et f^2 n'ont que des composantes positives ou nulles et que $f^{cov} = f^1 + f^2$ est tel que $f^{cov} \geq 1$. Le réseau de Petri de la figure 3 est donc k -borné quel que soit son marquage initial. Les invariants de place (4) et (5) nous montrent que pour le marquage initial considéré il est 1-borné (sauf).

e)

Les places p2, p3, p5 et p6 sont substituables. Elle n'on qu'une transition en entrée et une transition en sortie et chaque fois avec un poids 1. De plus leur marquage initial est nul et leurs transitions de sorties possèdent au moins une place en sortie. On peut donc les supprimer en conservant l'équivalence pour les trois bonnes propriétés. Nous obtenons alors le réseau de Petri de la figure 8.

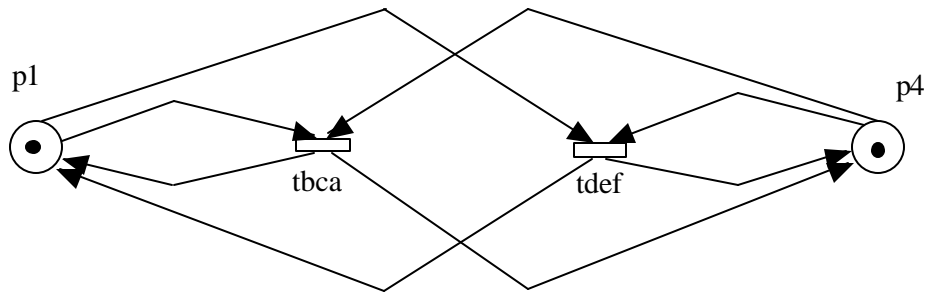


Figure 8

Les places p1 et p4 sont implicites dégénérées et les conditions pour les éliminer en conservant l'équivalence vis-à-vis des bonnes propriétés sont remplies puisqu'elles contiennent initialement un jeton et qu'elles ne sont reliées au reste du réseau de Petri que par des boucles élémentaires de poids 1. Nous obtenons alors le réseau de Petri de la figure 9.



Figure 9

La transition tdef est identique à la transition tbca et nous obtenons alors le réseau complètement réduit de la figure 10.



Figure 10

Le réseau de la figure 10 est k-borné, vivant et réinitialisable pour son marquage initial et comme nous avons conservé l'équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés, le réseau de la figure 3 est k-borné, vivant et réinitialisable pour le marquage initial donné. Ceci est cohérent avec le résultat de la question précédente puisque nous avons trouvé qu'il était 1-borné (sauf).

f)

Le graphe des marquage accessibles du réseau de la figure 3 pour le marquage initial donné est représenté figure 11.

Il ne comporte que 5 marquages accessibles. C'est un graphe fortement connexe qui implique toutes les transitions (elles sont toutes franchies une fois pour construire le graphe). On peut donc vérifier facilement que le réseau de Petri de la figure 3 est 1-borné, réinitialisable et vivant. Ceci est cohérent avec les questions précédentes.

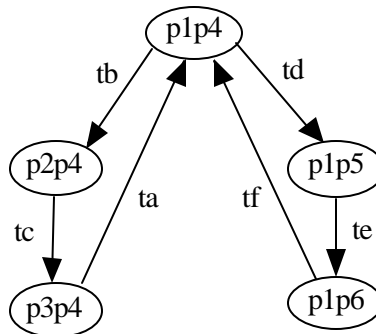


Figure 11

g)

Lors de la question d) nous avons montré les deux invariants de places suivants :

$$M(p1) + M(p2) + M(p3) = 1 \quad (4)$$

$$M(p4) + M(p5) + M(p6) = 1 \quad (5)$$

Comme les marquages sont des entiers positifs ou nuls, nous pouvons donc en déduire (quel que soit M, marquage accessible à partir du marquage initial) :

$$M(p2) + M(p3) \leq 1 \quad (1)$$

$$M(p5) + M(p6) \leq 1 \quad (2)$$

On ne peut donc en déduire qu'à partir du marquage initial il est impossible d'atteindre un marquage tel que les places p2 et p3 contiennent toutes les deux un jeton, ni d'atteindre un marquage tel que les places p5 et p6 contiennent toutes les deux un jeton.

Si l'on considère l'invariant associé à $f^{cov} = f^1 + f^2$ nous obtenons :

$$M(p1) + M(p2) + M(p3) + M(p4) + M(p5) + M(p6) = 2$$

En tenant compte du fait que les marquages sont des entiers positifs ou nuls nous en déduisons :

$$M(p2) + M(p3) + M(p5) + M(p6) \leq 2$$

ce qui ne permet pas de déduire qu'il est impossible d'atteindre un marquage mettant, par exemple, un jeton dans p2 et un jeton dans p5. Nous ne pouvons pas montrer qu'il y a exclusion mutuelle entre les places p2 et p3 d'une part et p5 et p6 d'autre part.

Examinons les marquages accessibles à partir du marquage initial. Nous avons :

$$M_0 = p1p4, M_1 = p2p4, M_2 = p3p4, M_3 = p1p5 \text{ et } M_4 = p1p6$$

Nous avons :

$$M_0(p2) + M_0(p3) + M_0(p5) + M_0(p6) = 0$$

et

$$M_i(p2) + M_i(p3) + M_i(p5) + M_i(p6) = 1 \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Donc quel que soit M, marquage accessible à partir du marquage initial, nous pouvons bien écrire :

$$M(p2) + M(p3) + M(p5) + M(p6) \leq 1 \quad (3)$$

Ceci prouve bien l'exclusion mutuelle entre les sections p2 et p3 d'une part et p5 et p6 d'autre part.

L'impossibilité d'avoir simultanément un jeton dans les places p2 ou p3 d'une part et p5 ou p6 de l'autre provient de l'existence des boucles élémentaires reliant les places p1 à td et p4 à tb. Ainsi, par exemple, après le franchissement de tb on obtient un jeton dans p2 mais td n'est plus franchissable. Ces boucles élémentaires ne sont pas prises en compte par la matrice d'incidence C du réseau de Petri. C'est pour cela que l'inégalité (3), bien que vérifiée, ne peut pas être prouvée par la base des composantes conservatives obtenues en d).

On peut d'ailleurs remarquer que si, par exemple, le marquage p2p5 n'est pas accessible à partir du marquage p1p4, par contre, le marquage p1p4 peut être atteint à partir du marquage p2p5 (par franchissement des transitions tc; ta; te; tf. L'accessibilité arrière (l'ensembles des marquages pouvant précéder M_0) n'est, ici, pas égale à l'accessibilité avant (l'ensemble des marquages accessibles à partir de M_0). Les invariants de places définissent des contraintes sur les marquages qui doivent être vérifiées à la fois par ceux de l'accessibilité avant et de l'accessibilité arrière. Ils ne peuvent pas être utilisés pour prouver des propriétés dissymétriques comme c'est le cas ici.